Домашняя работа по теме «Показательные уравнения»

Методы решения показательных уравнений

1. Метод уравнивания показателей
2. Метод введения новой переменной
3. Метод вынесения общего множителя за скобки
4. Функционально-графический метод
5. Метод почленного деления
6. Метод группировки

Базовый и углубленный уровень

1. Метод уравнивания показателей

Алгоритм решения уравнения методом уравнивания показателей:

- представить обе части показательного уравнения в виде степеней с одинаковыми основаниями;

- на основании теоремы, если $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0, a \neq 1$ равносильно уравнению вида $f(x) = g(x)$, приравниваем показатели степеней;

- решаем полученное уравнение, согласно его виду(линейное, квадратное и т.д.);

- записываем ответ.

<u>Пример 1.</u>

Решить уравнение:

$3^x = 27$

Решение:

Представим 27 как 3^3. Наше показательное уравнение имеет одинаковое основание 3.

$3^x{=}3^3$

Данное уравнение равносильно уравнению

$x = 3$

Ответ: $x = 3$.

<u>Пример 2.</u>

Решить уравнение:

$$(0{,}2)^{x-0{,}5} \cdot (0{,}2)^{0{,}5} = (0{,}2)^{-1} \cdot ((0{,}2)^2)^{x-1}$$

Решение:

Упростим показательное уравнение

$(0{,}2)^x = (0{,}2)^{2x-3}$

т.к. в показательном уравнении основания одинаковы, следует, что оно равносильно уравнению:

$x = 2x - 3$

решаем это линейное уравнение и получаем:

$x = 3$

Ответ: $x = 3$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $4^{3-2x} = 4^{2-x}$;

2. $2^{5x+1} = 4^{2x}$;
3. $5^3 = 25^{x+0{,}5}$;
4. $8^x = 4^{x-1}$;
5. $2^x = 32$;
6. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{27}{8}$;
7. $\sqrt{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{64}\right)^x$;
8. $5^{x-4} = 25^2$;
9. $5^{x^2-8x+12} = 1$;
10. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

2. Метод введения новой переменной

Алгоритм решения показательного уравнения методом введения новой переменной:

- определить возможность переписать данное уравнение в новом виде, позволяющем ввести новую переменную;
- вводим новую переменную;
- решаем уравнение относительно новой переменной;
- записываем ответ.

<u>Пример1.</u>

Решить уравнение:

$9^x - 5 \cdot 3^x + 4 = 0$

Решение:

Упростим показательное уравнение

$(3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 4 = 0$

применим метод введения новой переменной,

пусть $3^x = t, t > 0$

данное уравнение можно записать в виде

$t^2 - 5t + 4 = 0$

решая это квадратное уравнение, получаем

$t_1 = 4, t_2 = 1$

теперь задача сводится к решению совокупности уравнений

$3^x = 4,\ \ 3^x = 1$

$x_1 = \log_3 4\ x_2 = 0$

Ответ: $x_1 = \log_3 4\ x_2 = 0$

<u>Пример 2.</u>

Решить уравнение:

$2^{2x} + 2^x - 2 = 0$

Решение:

Пусть $2^x = t, t > 0$

получаем квадратное уравнение

$t^2 + t - 2 = 0$

находим корни квадратного уравнения

$t_1 = 1, t_2 = -2$ – не удовлетворяет условию $t>0$

$2^x = 1$

$2^x = 2^0$

$x = 0$

Ответ: $x = 0$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $4^x + 2^x - 24 = 0$;
2. $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$;
3. $4^x - 3 \cdot 2^x = 40$;
4. $2^{4x} - 50 \cdot 2^{2x} = 896$;
5. $7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$;
6. $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$;
7. $16^x + 4 \cdot 4^x - 5 = 0$;
8. $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$;
9. $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$;
10. $64^x - 8^x - 56 = 0$.

Углубленный уровень

3. Метод вынесения общего множителя за скобки

Решение показательных уравнений методом вынесения общего множителя за скобки

<u>Пример1.</u>

Решить уравнение:

$3^x + 3^{x+1} = 108$

Решение:

$3^x + 3^{x+1} = 108$

т.к. 3^{x+1} равносильно $3^x \cdot 3$, запишем как

$3^x + 3^x \cdot 3 = 108$

вынесем 3^x за скобку

$3^x \cdot (1 + 3) = 108$

$3^x \cdot 4 = 108$

$3^x = \frac{108}{4} = 27$

27 представим как 3^3

тогда получим

$3^x = 3^3$

Следовательно,

$x = 3$

Ответ: $x = 3$.

Пример 2.

Решить уравнение:

$7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$

Решение:

$7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$

Также решаем методом вынесения множителя за скобки. Для этого упростим выражение

$7^x \cdot 49 + 4 \cdot 7^x \cdot 7 = 539$

вынесем 7^x за скобки

$7^x \cdot (29 + 28) = 539$

$7^x = \frac{539}{77}$

$7^x = 7$

$x = 1$

Ответ: $x = 1$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$;
2. $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$;
3. $7^x + 7^{x+2} = 350$;
4. $7 \cdot 5^x - 5^{x+1} = 2 \cdot 5^3$;
5. $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} = 21$;
6. $5^{1+2x} + 5^{2x+3} = 650$;
7. $6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$;
8. $4^{x+1} + 4^x = 320$;
9. $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$;
10. $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$.

4. Функционально-графический метод

Алгоритм:

- левую и правую части уравнения представить в виде функций;
- построить графики обеих функций в одной системе координат;
- найти точки пересечения графиков, если они есть;
- указать абсциссы точек пересечения, это корни уравнения.

Решить уравнение:

$3^{2x} = 10 - x$

Строим таблицы значений:

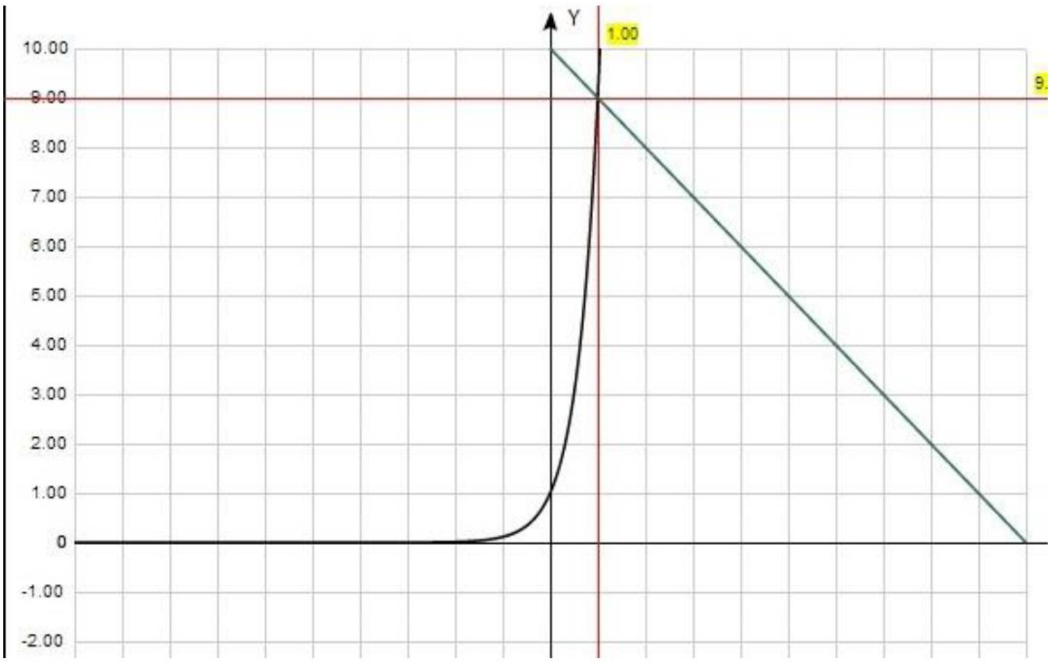
$y = 3^{2x}$

x	0	1	- 1
y	1	9	$\frac{1}{3}$

$y = 10 - x$

x	0	10
y	10	0

Построив графики этих функций, найдем абсциссу точки пересечения, она и будет корнем уравнения $x = 1$.



Ответ: $x = 1$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$;

2. $5^{x-1} = \frac{1}{2}$;

3. $4^x = 5 - x$;

4. $3^{-x} = -\frac{3}{x}$;

5. $\frac{1}{2}^{3x} = 2x - 3$.

5. Метод почленного деления

Данный метод заключается в том, чтобы разделить каждый член уравнения содержащий степени с одинаковыми показателями, но разными основаниями, на одну из степеней. Этот метод применяется для решения однородных показательных уравнений.

<u>Пример 1.</u>

Решить уравнение:

$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x = 0$

Решение:

$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x = 0$

Для того, чтобы решить данное показательное уравнение разделим его на 5^{2x}

$3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 2^x \cdot 5^x = 0 : 5^{2x}$

$3 \cdot (\frac{2}{5})^{2x} + 2 - 7 \cdot (\frac{2}{5})^x = 0$

далее это уравнение можем решить методом введения новой переменной

пусть $(\frac{2}{5})^x = y$, y>0

$3y^2 - 7y + 2 = 0$

$y_1 = 2 \quad (\frac{2}{5})^x = 2 \qquad x_1 = \log_{2/5} 2$

$y_2 = \frac{1}{3} \quad (\frac{2}{5})^x = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \log_{2/5} 3$

Ответ: $x_1 = \log_{2/5} 2$, $x_2 = \log_{2/5} 3$.

<u>Пример 2.</u>

Решите уравнение:

$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 5^x \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$

Решение:

$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 5^x \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$

Разделим обе части уравнения почленно на 3^{2x}, получим равносильное ему уравнение

$5 \cdot (\frac{5}{3})^{2x} - 13 \cdot (\frac{5}{3})^x + 6 = 0$

Сделаем замену $y = (\frac{5}{3})^x, y > 0$

Сделаем замену $y = (\frac{5}{3})^x, y > 0$

$5y^2 - 13y + 6 = 0$

$y_1 = \frac{3}{5} \quad (\frac{5}{3})^x = \frac{3}{5} \quad x_1 = -1$

$y_2 = 2 \quad (\frac{5}{3})^x = 2 \quad x_2 = \frac{25}{9}$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = \frac{25}{9}$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$;

2.$2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0$;

3. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$;

4. $3 \cdot 4^{2x} - 4^x \cdot 9^x + 2 \cdot 9^{2x} = 0$;

5. $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$

5. Метод почленного деления

Данный метод заключается в том, чтобы разделить каждый член уравнения содержащий степени с одинаковыми показателями, но разными основаниями, на одну из степеней. Этот метод применяется для решения однородных показательных уравнений.

__**Пример 1.**__

Решить уравнение:

$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x = 0$

Решение:

$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x = 0$

Для того, чтобы решить данное показательное уравнение разделим его на 5^{2x}

$3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 2^x \cdot 5^x = 0 : 5^{2x}$

$3 \cdot (\frac{2}{5})^{2x} + 2 - 7 \cdot (\frac{2}{5})^x = 0$

далее это уравнение можем решить методом введения новой переменной

пусть $(\frac{2}{5})^x = y$, y>0

$3y^2 - 7y + 2 = 0$

$y_1 = 2 \quad (\frac{2}{5})^x = 2 \qquad \mathrm{x}_1 = \log_{2/5} 2$

$y_2 = \frac{1}{3} \quad (\frac{2}{5})^x = \frac{1}{3} \qquad \mathrm{x}_2 = \log_{2/5} 3$

Ответ: $\mathrm{x}_1 = \log_{2/5} 2$, $\mathrm{x}_2 = \log_{2/5} 3$.

Пример 2.

Решите уравнение:

$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 5^x \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$

Решение:

$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 5^x \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$

Разделим обе части уравнения почленно на 3^{2x}, получим равносильное ему уравнение

$5 \cdot (\frac{5}{3})^{2x} - 13 \cdot (\frac{5}{3})^x + 6 = 0$

Сделаем замену $y = (\frac{5}{3})^x, y > 0$

$5y^2 - 13y + 6 = 0$

$y_1 = \frac{3}{5} \quad (\frac{5}{3})^x = \frac{3}{5} \quad x_1 = -1$

$y_2 = 2 \quad (\frac{5}{3})^x = 2 \quad x_2 = \frac{25}{9}$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = \frac{25}{9}$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$;

2.$2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0$;

3. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$;

4. $3 \cdot 4^{2x} - 4^x \cdot 9^x + 2 \cdot 9^{2x} = 0$;

5. $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$

6. Метод группировки

Способ группировки заключается в том, чтобы собрать степени с разными основаниями в разных частях уравнения, а затем разделить обе части уравнения на одну из степеней.

Пример 1.

Решить уравнение:

$3 \cdot 2^{2x} + \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 4^{x+1} = -\frac{1}{3} \cdot 9^{x+2}$

Решение:

$3 \cdot 2^{2x} + \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 4^{x+1} = -\frac{1}{3} \cdot 9^{x+2}$

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$\frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{2x}$

$\frac{1}{2} \cdot 9^{x} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 9^{x} \cdot 9^{2} = 6 \cdot 4^{x} \cdot 4 - 3 \cdot 4^{x}$

$4{,}5 \cdot 9^{x} + 27 \cdot 9^{x} = 24 \cdot 4^{x} - 3 \cdot 4^{x}$

$9^{x}(4{,}5 + 27) = 4^{x} \cdot 21$

$9^{x} \cdot 31{,}5 = 4^{x} \cdot 21 \ \ :9^{x}$

$(\frac{4}{9})^{x} = \frac{3}{2}$

$(\frac{2}{3})^{2x} = (\frac{2}{3})^{-1}$

$2x = -1$

$x = -0{,}5$

Ответ: $x = -0{,}5$.

Пример 2.

Решите уравнение:

$5^{2x} - 4^{x+1} = 4^{x} + 5^{2x-1}$

Решение:

$5^{2x} - 4^{x+1} = 4^{x} + 5^{2x-1}$

$5^{2x} - 4^{x+1} - 4^{x} - 5^{2x-1} = 0$

$5^{2x} \cdot (1 - 5^{-1}) - 4^{x}(4 + 1) = 0$

$5^{2x} \cdot \frac{4}{5} = 5 \cdot 4^{x}$

$25^{x} \cdot \frac{4}{5} = 4^{x} \cdot 5$

$\frac{4}{25} = \frac{4^x}{25^x}$

$\frac{4}{25} = (\frac{4}{25})^x$

$x = 1$

Ответ: $x = 1$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $3 \cdot 2^{2x} + \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 4^{x+1} = -\frac{1}{3} \cdot 9^{x+2}$;

2. $4^x + 3^{x-1} = 4^{x-1} + 3^{x+2}$;

3. $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;

4. $7^{x-5} \cdot 5^{x^2} - 49 \cdot 5^{x^2} + 3 \cdot 7^{x-5} = 147$;

5. $3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}$.