Домашняя работа по теме «Показательные неравенства»

Методы решения показательных неравенств:

1. Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$
2. Неравенства вида $a^{f(x)} > b,\ a > 0$
3. Неравенства вида $a^{f(x)} > b^{f(x)}$
4. Решение показательных неравенств методом замены переменной
5. Решение неравенств, содержащих однородные функции относительно показательных функций

1. Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

Решение неравенств подобного вида основано на следующих утверждениях:

- если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$;

- если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Заметим, что применяя какой-либо метод при решении неравенства, содержащего знак «>», можно этот же метод применять и при решении неравенств, содержащих знаки «<», «≥», «≤».

Пример 1.

Решить неравенство:

$2^x < \frac{1}{8}$

Решение:

$2^x < \frac{1}{8}$

Поскольку $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, то

$2^x < 2^{-3}$, т.к. 2>1, функция $y = 2^t$ - возрастает

$x < -3$

Ответ: $x \in (-\infty; -3)$

Пример 2.

$2^{x^2} > 2^{x+2}$

Решение:

$2^{x^2} > 2^{x+2}$

$x^2 > x + 2$, т.к. 2>1 функция $y = 2^t$ возрастает

$x^2 - x - 2 > 0$

$x < -1, x > 2$

$x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $4^{5-2x} < 0{,}25$;
2. $0{,}4^{2x+1} \geq 0{,}16$;
3. $5^{x^2-2x-1} < 25$;
4. $3^x > 9^{x-3}$;
5. $(\frac{1}{7})^x \leq 49$.

2. Неравенства вида $a^{f(x)} > b, a > 0$

Необходимо рассмотреть два случая:

А) $b \leq 0$, тогда $a^{f(x)} > b \leftrightarrow x \in D(f)$

В) $b > 0$, тогда $a^{f(x)} > b \leftrightarrow f(x) > \log_a b$ при $a > 1$;

$a^{f(x)} > b \leftrightarrow f(x) < \log_a b$ при $0 < a < 1$.

При $a = 1$ исходное неравенство $a^{f(x)} > b$ равносильно числовому неравенству $1 > b$ при $x \in D(f)$.

<u>Пример 1.</u>

Решить неравенство:

$2^x > 5$

Решение:

$2^x > 5$

$2^x > 2^{\log_2 5}$

$x > \log_2 5$

Ответ: $x \in(\log_2 5\ ;\ +\infty)$

Пример 2.

$3^x < 6$

Решение:

$3^x < 6$

$3^x < 3^{\log_3 6}$

$x < \log_3 6$

$x \in (-\infty;\ \log_3 6)$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $(\frac{1}{4})^x < 7;$

2. $3^x > 5;$

3. $(\frac{1}{3})^x > 25;$

4. $2^x < 6;$

5. $(\frac{1}{2})^x \geq 3.$

3. Неравенства вида $a^{f(x)} > b^{g(x)}$

При решении неравенств подобного вида применяют логарифмирование обеих частей по основанию a или b. Учитывая свойства показательной функции, получаем:

$a^{f(x)} > b^{g(x)} \leftrightarrow f(x) > g(x)\log_a b,$ если $a > 1;$

$a^{f(x)} > b^{g(x)} \leftrightarrow f(x) < g(x)\log_a b,$ если $0 < a < 1.$

Пример 1.

Решить неравенство:

$2^x \geq 3^{x^2}$

Решение:

$2^x \geq 3^{x^2}$

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 2. Тогда имеем:

$$\log_2(2^x) \geq \log_2(3^{x^2}) \leftrightarrow x \geq x^2\log_2 3 \leftrightarrow x = x^2\log_2 3 \geq 0$$

$$\leftrightarrow x(1 - x\log_2 3) \geq 0 \leftrightarrow x \in \left[0; \frac{1}{\log_2 3}\right] = [0; \log_3 2]$$

Ответ: $x \in [0; \log_3 2]$

4. Решение показательных неравенств методом замены переменной

<u>Пример 1.</u>

Решить неравенство:

$9^x + 27 < 12 \cdot 3^x$

Решение:

$9^x + 27 < 12 \cdot 3^x$

Пусть $3^x = t$ тогда исходное неравенство равносильно:

$t^2 - 12t + 27 < 0$

3<t<9

3<3^x<9

3^1<3^x<3^2

$1 < x < 2$

Ответ: $x \in (1; 2)$.

<u>Пример 2.</u>

Решите неравенство:

$16^x + 4^x - 2 > 0$

Решение:

$16^x + 4^x - 2 > 0$

Пусть $4^x = t, t > 0$

$t^2 + t - 2 > 0$

$\begin{cases} t < -2 \\ t > 1 \end{cases}$ т.к. $t = 4^x$

$\begin{cases} 4^x < -2 < 0 \text{ нет решений} \\ 4^x > 1 \end{cases}$

$4^x > 1$

$4^x > 4^0$

$x > 0$

Ответ: $x \in (0;+\infty)$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $(0{,}5)^{2x} + 2 < 3 \cdot (0{,}5)^x$;
2. $9^{x-1} < 3^{x-1} + 6$;
3. $25^x \leq 6 \cdot 5^x - 5$;
4. $4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 4 \geq 0$;
5. $4^x - 2^{x+1} - 24 < 0$.

5. Решение неравенств, содержащих однородные функции относительно показательных функций

__**Пример 1.**__

Решить неравенство:

$4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0$

Решение:

Исходное неравенство можно записать в виде:

$2 \cdot 2^x - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0$

В левой части – однородные функции относительно 2^x и 5^x. Отсюда можно разделить обе части неравенства на $2^{2x}, 5^{2x}$ или $10^x = 2^x \cdot 5^x$. Разделив обе части исходного неравенства на $5^{2x} = 25^x$, получаем:

$(\frac{4}{25})^x - 2 - (\frac{10}{25})^x > 0$

$((\frac{2}{5})^x)^2 - (\frac{2}{5})^x - 2 > 0$

Обозначив $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t,$ получаем

$t^2 - t - 2 > 0$

$t_1 < -1, t_2 > 2$

Поскольку $t_1 < -1$ и $t_2 > 2$ исходное неравенство равносильно следующему:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2}$$

$$x < \log_{\frac{2}{5}} 2$$

Ответ: $x \in (-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 2)$

<u>Пример 2.</u>

Решите неравенство:

$$3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2x+12} > 0$$

Решение:

$$3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2x+12} > 0$$

$$(3^{x^2})^2 - 2 \cdot 3^{x^2} \cdot 3^{x+6} + (3^{x+6})^2 > 0$$

$$\left(\frac{3^{x^2}}{3^{x+6}}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3x^2}{3^{x+6}}\right) + 1 > 0$$

$$3^{x^2-x-6} - 2 \cdot 3^{x^2-x-6} + 1 > 0$$

$$3^{x^2-x-6} \neq 1$$

$$x^2 - x - 6 \neq 0$$

$$\begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 3) \cup (3; +\infty)$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $2^{2x+1} + 3^{2x+1} > 5 \cdot 6^x$;
2. $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x \leq 7 \cdot 10^x$;
3. $6 \cdot 25^x - 5 \cdot 10^x > 4^x$;
4. $2^{x+1} - 3 \cdot 10^x > 5^{2x+1}$;
5. $5 \cdot 9^x + 15 \cdot 5^{2x-1} \geq 8 \cdot 15^x$.